CORRIGÉ CNM TSI 2002 - MATHS 1

I. Transformation d'Abel

I.1. a) Immédiat.

b) On peut poser $B_{-1} = 0$, de sorte que la relation $b_n = B_n - B_{n-1}$ est encore vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \qquad (\text{car } B_{-1} = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \qquad (\text{changement d'indice } k' = k-1 \text{ dans la 2}^{\text{e}} \text{ somme}) \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \,.
\end{aligned}$$

I.2. a) Il s'agit d'un résultat du cours de Sup (à redémontrer le jour du concours, en revenant à la définition de la limite ou en utilisant le théorème des gendarmes).

b) On suppose la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée ; il existe donc un réel B tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|B_n| \leqslant B$.
Par suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ |(a_n - a_{n+1}) B_n| \leqslant B\,|a_n - a_{n+1}|$. La série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ étant convergente par hypothèse, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série $\sum |(a_n - a_{n+1}) B_n|$, c'est-à-dire l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série $\sum (a_n - a_{n+1}) B_n$.

Cela signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ existe. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n B_n = 0$, la relation démontrée en **1.b** montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ existe, c'est-à-dire que la série de terme général $a_n b_n$ converge.

I.3. Supposons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a_0 \,,$$

c'est-à-dire que la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge.
Les hypothèses de la question précédente sont donc vérifiées, donc la série de terme général $a_n b_n$ converge.

I.4. Supposons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Si l'on pose $b_n = (-1)^n$ pour tout n, alors $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k = 0$ ou 1 selon la parité de n, donc la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après la question précédente, la série $\sum a_n b_n$ converge.

On a donc démontré le *critère spécial sur les séries alternée* :

> Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

(Notez que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle implique $a_n \geqslant 0$ pour tout n !)

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

II.1. Le calcul est classique, et a déjà été fait maintes fois depuis la Sup...
Si x est un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$, alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$ et les formules bien connues sur les suites géométriques donnent :

$$\begin{aligned}
C_n(x) + \mathrm{i} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{2}x} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n}{2}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{2}x}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x} \frac{-2\mathrm{i} \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{-2\mathrm{i} \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \,,
\end{aligned}$$

d'où en séparant partie réelle et imaginaire :

$$C_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{-x}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,.$$

II.2. On a donc, pour $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ fixé, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, c'est-à-dire que la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

En appliquant alors le résultat de la question **I.3.** avec $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ (la valeur de a_0 importe peu) et $b_n = \sin nx$, on obtient que la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin nx}{n}$ converge lorsque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Et puisqu'elle converge aussi lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ ($\sin nx = 0$ pour tout n), on peut donc définir

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}\,.$$

II.3. a) Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \geqslant 1$: $f_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx}{n}$.

Alors f_N est impaire donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \lim_{N\to+\infty} f_N(-x) = \lim_{N\to+\infty} -f_N(x) = -f(x)\,,$$

donc f est impaire.
On montre de la même façon que, puisque les f_N sont 2π-périodiques, il en est de même de f.

b) Pour $x \in \left]0\,;\pi\right[$ on a, en utilisant un résultat de la question **II.1**, et puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est continue sur $\left]0\,;\pi\right[$:

$$\begin{aligned}\int_x^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t &= \int_x^\pi \frac{\mathrm{d}t}{2} + \int_x^\pi C_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi-x}{2} + \int_x^\pi \sum_{k=1}^{n}\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{\pi-x}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\end{aligned}$$

ce qui est l'égalité demandée.

II.4. a) Puisque $x \in \left]0\,;\pi\right[$, l'intervalle $[x\,;\pi]$ est inclus dans $\left]0\,;\pi\right[$ donc la fonction $h\colon t \mapsto \dfrac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle ; h' étant continue sur le *segment* $[x\,;\pi]$ y est bornée.

b) Une intégration par parties (les fonctions considérées étant toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$) donne immédiatement :

$$\begin{aligned}\int_x^\pi \underbrace{h(t)}_{u(t)}\underbrace{\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)h(t)\right]_x^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_x^\pi h'(t)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)h(x) + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_x^\pi h'(t)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

ce qui est l'égalité demandée.

c) On en déduit :

$$\begin{aligned}\left|\int_x^\pi h(t)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\underbrace{\left|\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right|}_{\leqslant 1}|h(x)| + \left|\int_x^\pi \underbrace{|h'(t)|}_{\leqslant\|h'\|_\infty}\underbrace{\left|\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right|}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}t\right|\right) \\ &\leqslant \frac{2}{2n+1}\left(|h(x)| + |\pi-x|\,\|h'\|_\infty\right),\end{aligned}$$

ce qui implique, par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_x^\pi h(t)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0$.

Remarque : nous venons de redémontrer, dans un cas particulier, le fameux lemme de Lebesgue.

d) On déduit alors de la question précédente et de la question **II.3.b**, pour tout $x \in]0\,;\pi[$:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}\,.$$

Cette égalité est encore vraie évidemment pour $x = \pi$.
Si x appartient à $]\pi\,;2\pi[$ on a $x - 2\pi \in]-\pi\,;0[$ et $2\pi - x \in]0\,;\pi[$, donc, h étant 2π-périodique et impaire :

$$f(x) = f(x-2\pi) = -f(2\pi - x) = -\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = \frac{\pi - x}{2}\,,$$

donc l'égalité est finalement vraie pour $x \in]0\,;2\pi[$.

III. Une majoration uniforme des sommes partielles

III.1. a)

$$\begin{aligned}\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin px}{p} &= \sum_{p=m+1}^{n} \frac{S_p(x) - S_{p-1}(x)}{p} = \sum_{p=m+1}^{n} \frac{S_p(x)}{p} - \sum_{p=m+1}^{n} \frac{S_{p-1}(x)}{p} \\ &= \sum_{p=m+1}^{n} \frac{S_p(x)}{p} - \sum_{p=m}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p+1} = \left[\frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p}\right] - \left[\sum_{p=m+1}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p+1} + \frac{S_m(x)}{m+1}\right] \\ &= \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - \frac{S_m(x)}{m+1}\,.\end{aligned}$$

b) On remarque déjà que, pour $x \in]0\,;2\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|S_n(x)| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,.$$

On déduit alors de la relation précédente et de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p=m+1}^{n} \frac{\sin px}{p}\right| &\leqslant \left|\frac{S_n(x)}{n}\right| + \sum_{p=m+1}^{n-1} |S_p(x)| \left|\underbrace{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}}_{\geqslant 0}\right| + \left|\frac{S_m(x)}{m+1}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\frac{1}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \frac{1}{m+1}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, puisque la série converge (cf. **II.2**), on obtient :

$$\left|\sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin px}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,.$$

III.2. a) Par définition de $k = E\left(\frac{\pi}{x}\right)$ on a $kx \leqslant \pi$ donc pour tout $p \in [\![1\,;k]\!]$, $\sin(px) \geqslant 0$.
D'autre part, on sait que pour tout $X \geqslant 0$ on a $\sin X \leqslant X$ donc pour tout $p \in [\![1\,;k]\!]$, $\sin(px) \leqslant px$.
Tout cela combiné donne l'inégalité demandée.

b) Inégalité classique : il suffit d'étudier sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $\varphi\colon \theta \mapsto \sin\theta - \dfrac{2}{\pi}\theta$. On obtient sans peine le tableau de variations suivant :

θ	0		$\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(\theta)$	0	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	0

qui montre que $\varphi(\theta) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

c) D'après l'inégalité obtenue en **III.1.b** et le résultat précédent (puisque $\frac{x}{2} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$), on a :

$$\left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin px}{p}\right| \leqslant \frac{2}{(k+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant \frac{2}{(k+1)\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}} = \frac{2\pi}{(k+1)x} < 2$$

puisque par définition de la partie entière on a $k \leqslant \dfrac{\pi}{x} < k+1$.

III.3. En combinant les résultats des deux questions précédentes on a :

$$\forall x \in]0\,;\pi],\ \left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin px}{p}\right| \leqslant \left|\sum_{p=1}^{k} \frac{\sin px}{p}\right| + \left|\sum_{p=k}^{n} \frac{\sin px}{p}\right| \leqslant 2+\pi\,,$$

et le résultat demeure vrai pour $x \in \mathbb{R}$ puisque la fonction $x \mapsto \left|\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin px}{p}\right|$ est π-périodique.

IV. Calcul de la somme d'une série

IV.1. Notons E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. On peut munir E d'un produit scalaire par :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f\,|\,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

(vérification aisée, c'est d'ailleurs un résultat du cours).

Pour ce produit scalaire, il est facile de voir que la famille des fonction $s_n : t \mapsto \sin(nt)$ pour $n \geqslant 1$ est orthonormale ; en effet, si $n \neq m$ on a

$$\begin{aligned}\langle s_n\,|\,s_m\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(\cos(n-m)t - \cos(n+m)t\big)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-m)t}{n-m} - \frac{\sin(n+m)t}{n+m}\right]_0^{2\pi} = 0\,,\end{aligned}$$

et si $n = m$:

$$\|s_n\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nt)}{2}\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

L'inégalité de Bessel donne alors, pour toute fonction $g \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle g\,|\,s_k\rangle^2 \leqslant \|g\|^2$$

(en effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle g\,|\,s_k\rangle^2$ est égal à $\|p(g)\|^2$ où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(s_1,\ldots,s_n)$, et il est bien connu que $\|p(g)\| \leqslant \|g\|$).

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n^2$ étant majorées, cette série est convergente.

IV.2. On connaît l'inégalité :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2ab \leqslant a^2 + b^2\,.$$

On aura donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{b_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergentes, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série de terme général $\left|\dfrac{b_n}{n}\right|$.

IV.3. a) Il suffit de remplacer b_p par sa valeur pour obtenir la relation demandée.

b) Là encore, la relation demandée est immédiate en remplaçant simplement $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p}$ par la valeur donnée dans la question précédente.

IV.4. a)

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\delta}\left(f(t)-\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(pt)}{p}\right)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(|f(t)|+\left|\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(pt)}{p}\right|\right)|g(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Or pour $t\in[0\,;\pi[$, $|f(t)|=\left|\dfrac{\pi-t}{2}\right|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ et $\left|\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(pt)}{p}\right|\leqslant 2+\pi$ d'après **III.3** et enfin $|g(t)|\leqslant M$ d'où l'on obtient :

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\delta}\left(f(t)-\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(pt)}{p}\right)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\delta(2+\pi+\frac{\pi}{2})M\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

L'autre inégalité se démontre exactement de la même manière.

b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\left|\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left(f(t)-\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(pt)}{p}\right)g(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{\sin(pt)}{p}\right||g(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{2}{(n+1)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}M\,\mathrm{d}t \quad (\text{d'après } \textbf{III.1.b})\\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\frac{2(2\pi-2\delta)M}{(n+1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\leqslant\frac{4M}{(n+1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\,,\end{aligned}$$

puisque si $t\in[\delta\,;2\pi-\delta]$, $\frac{t}{2}\in\,]0\,;\pi[$ d'où $\sin\left(\frac{t}{2}\right)\geqslant\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)>0$.

c) On peut choisir n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$ on ait $\dfrac{4M}{(n+1)\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$ puisque cette expression tend vers 0 quand $n\to+\infty$.
En combinant les 3 inégalités précédentes, on obtient alors :

$$\forall n\geqslant n_0,\ \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(f(t)-\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(pt)}{p}\right)g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon.$$

Cela signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(pt)}{p}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ou encore :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{b_p}{p}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ce qu'il fallait démontrer.